[5] H.Triebel. Interpolation Theory. Function spaces. Differential Operators. – Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1978.

[4] [6] E.Sanchez-Palencia. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. – New York: Springer-Verlag, 1980.

Трифонов Е.В. (Казань)

Вычисление комплексных постоянных распространения диэлектрических волноводов

Предложен проекционный метод вычисления комплексных постоянных распространения диэлектрических волноводов с произвольным контуром поперечного сечения. Возможности метода проиллюстрированы на примере волноводов кругового и квадратного сечений. Исследована внутренняя сходимость метода.

Рассмотрим цилиндрический диэлектрический волновод с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_1, находящемся в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. В каждой среде магнитная проницаемость $\mu = 1$. Пусть поперечное сечение волновода S_1 – область, ограниченная дважды непрерывно дифференцируемым контуром C.

Будем искать собственные волны волновода, то есть нетривиальные решения системы уравнений Максвелла

$$rot\ H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \qquad rot\ E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

вида

$$E(x, y, z, t) = Re(\overline{E}(x, y) \exp(i(\omega t - \beta z))),$$

$$H(x, y, z, t) = Re(\overline{H}(x, y) \exp(i(\omega t - \beta z))).$$

Здесь $\omega > 0$ – заданная частота электромагнитных колебаний, постоянная распространения β – неизвестный комплексный параметр, $\overline{E}, \overline{H}$ – комплексные амплитуды собственных волн.

Выразив все компоненты векторных полей через продольные магнитные и электрические компоненты $u = \overline{E}_z$, $v = \overline{H}_z$, мы можем свести исходную задачу к следующей задаче (см., например, [1]): определить такие комплексные значения параметра β, при которых существуют нетривиальные решения системы

$$\Delta u + \chi_j^2 u = 0, \qquad \Delta v + \chi_j^2 v = 0, \qquad M = (x, y) \in S_j, \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ - u^- = 0, \qquad v^+ - v^- = 0, \qquad M \in C,$$

$$\frac{1}{\chi_1^2}\left(\beta\frac{\partial u^-}{\partial\tau} - \omega\mu_0\frac{\partial v^-}{\partial\nu}\right) - \frac{1}{\chi_2^2}\left(\beta\frac{\partial u^+}{\partial\tau} - \omega\mu_0\frac{\partial v^+}{\partial\nu}\right) = 0, \qquad M \in C,$$

$$\frac{1}{\chi_1^2}\left(\beta\frac{\partial v^-}{\partial\tau} + \omega\varepsilon_1\frac{\partial u^-}{\partial\nu}\right) - \frac{1}{\chi_2^2}\left(\beta\frac{\partial v^+}{\partial\tau} + \omega\varepsilon_2\frac{\partial u^+}{\partial\nu}\right) = 0, \qquad M \in C$$

и парциальным условиям на бесконечности

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} H_n^{(1)}(\chi_2 r)\exp(inr), \quad r \geq R,$$

здесь $\chi_j = \sqrt{k_0^2 n_j^2 - \beta^2}$, $k_0 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$, $\varepsilon_j = \varepsilon_0 n_j$, $j = 1, 2$. Будем искать β на римановой поверхности Λ функции $\ln\chi_2(\beta)$. Если β находится на главном "физическом" листе Λ_0^1 этой поверхности, который определяется условиями $Im\chi_2^2 \geq 0$ и $-\pi/2 \leq 0 \leq 3\pi/2$, то неизвестные функции экспоненциально убывают на бесконечности. Если β находится на листе Λ_0^2 этой поверхности ($Im\chi_2^2 < 0$ и $-\pi/2 \leq 0 \leq 3\pi/2$), то неизвестные функции экспоненциально возрастают на бесконечности. На остальных листах неизвестные функции представляют собой сумму возрастающей и убывающей на бесконечности волн.

В работе [1] предложен численный метод вычисления постоянных распространения β . На основе представления неизвестных функций в виде потенциалов простого слоя исходная задача сведена к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений с нелинейным вхождением спектрального параметра в ядра операторов. Для численного решения этой системы был предложен метод Галеркина с тригонометрическим базисом.

Этот метод был использован в [1] только для нахождения вещественных дисперсионных характеристик.

В данной работе исследована возможность определения комплексных постоянных распространения аналогичным методом.

Доказано, что особенности ядер интегральных операторов можно выделить аналитически. На основании этого интегральные операторы задачи с особенностями представлены в виде суммы двух: оператора без особенностей и оператора с известными собственными функциями и собственными значениями. Разработан комплекс программ для численного решения этой системы.

Алгоритм имеет два параметра: M– количество узлов интегрирования и N– количество базисных функций в методе Галеркина. Численные эксперименты показали, что метод имеет внутреннюю сходимость по M и N.

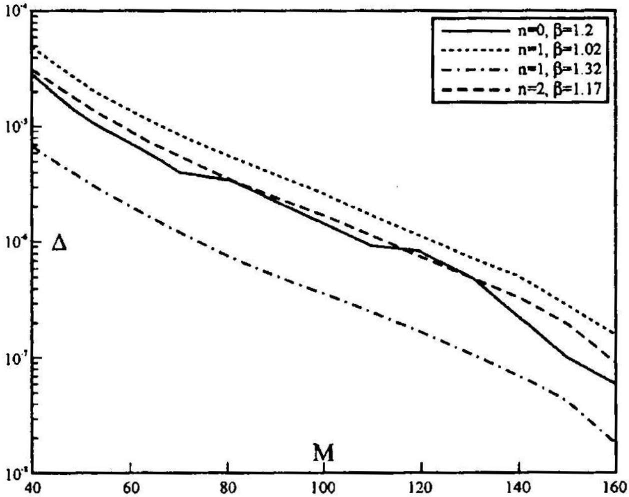

Рис.1

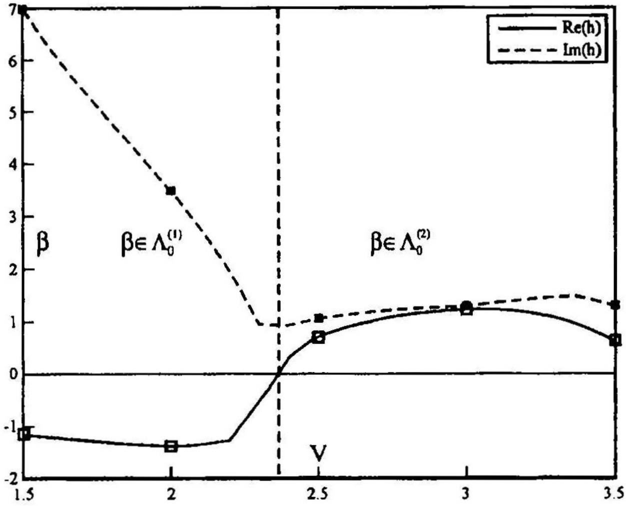
Re(h)
Im(h)
β
β∈Λ₀⁽¹⁾
β∈Λ₀⁽²⁾
V
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
1.5
2
2.5
3
3.5

Рис.2

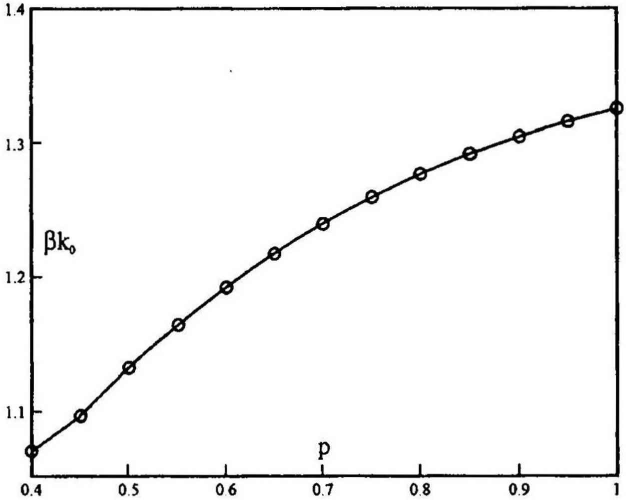
βk₀
p
1.4
1.3
1.2
1.1
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Рис.3

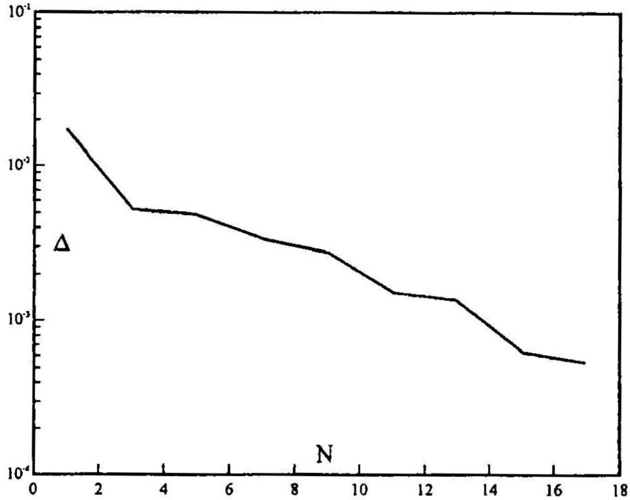

Рис.4

Вычислены вещественные β для волновода кругового сечения. В этом случае исходную задачу можно решить аналитически и получить ряд характеристических уравнений относительно β (см., например, [2]). Вычисления проводились при $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $k_0R = 4$. Разность Δ между точным и приближенным решениями в зависимости от количества узлов интегрирования M представлена на Рис.1. Увеличение N не влияет на точность вычислений, т.к. в этом случае метод Галеркина приводит к системе, эквивалентной характеристическим уравнениям. Заметим, что нет необходимости брать большие M, чтобы получить хорошую точность вычислений.

Также были вычислены комплексные β для волновода кругового сечения. Они представлены на Рис.2. Здесь $V = k_0R$ $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^{-1/2}$, $\varepsilon_1 = 61$, $\varepsilon_2 = 1$. Сплошные кривые показывают решение характеристического уравнения, а квадратами отмечены приближенные решения. Результаты совпали с данными работы [2].

Видно, что $Re(\beta)$ меняет знак при $V = V_0$. Это значит, что β переходит с листа Λ_0^1 на лист Λ_0^2.

Проведен ряд численных экспериментов с волноводом квадратного сечения. Дисперсионная кривая для основной волны представлена на Рис.3. Граница области аппроксимировалась функцией

$$r(\phi) = \left(\left(\frac{\cos\phi}{d} \right)^{2m} + \left(\frac{\sin\phi}{d} \right)^{2m} \right)^{-1/2m}.$$

Здесь $p = d/\pi\omega$, d – длина стороны квадрата. Зависимость точности вычислений от количества базисных функций для $p = 0.7$ представлена на Рис.4. Метод имеет внутреннюю сходимость по N.

Литература

[1] Карчевский Е.М. Определение постоянных распространения собственных волн диэлектрического волновода методами теории потенциала // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1998. – Т.38, №1. – С.132–136.

[2] Jablonski T.F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – Vol.11, 4 / April.

Тумаков Д.Н. (Казань)

Обоснование метода усечения БСЛАУ задачи о скачке поперечного сечения плоского волновода

Пусть в плоскости $x = 0$ состыкованы два полубесконечных волновода с металлическими стенками $\alpha < z < \beta$, $x < 0$ и $a < z < b$, $x > 0$, причем $a \le \alpha < \beta \le b$. Обозначим $h^+ = b - a$, $h^- = \beta - \alpha$, $\Gamma^\pm = \pi/h^\pm$ $\chi = h^-/h^+$ и

$$\varphi_n^-(z) = \sin\Gamma^- n(z-\alpha), \quad \varphi_n^+(z) = \sin\Gamma^+ n(z-a), \quad n = 1, 2, \ldots$$

в случае ТЕ-поляризации или

$$\varphi_n^-(z) = \cos\Gamma^- n(z-\alpha), \quad \varphi_n^+(z) = \cos\Gamma^+ n(z-a), \quad n = 0, 1, \ldots$$